分布型時間遅れをもつ
バーガーズ方程式の半群理論を用いた研究

お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科 理学専攻数学コース
/ 理化学研究所 革新知能統合研究センター 数理科学チーム

小川実里 (Misato OGAWA) *

概要

バーガーズ方程式は, 交通流の数理モデルとして知られる. また, バーガーズ方程式に遅延項を導入することで, 運転手が周囲の混雑状況から判断し行動するまでの時間遅延を考慮した数理モデルとできる. 本講演では, そうしたバーガーズ方程式と交通流の数理モデルとの対応と, 分布型の遅延項をもつバーガーズ方程式の時間大域解の存在と一意性, 減衰評価について, 半群理論を用いて得られた結果を紹介する.

1　導入

本講演は, 久保隆徹先生 (お茶の水女子大学) との共同研究に基づく.

交通流の数理モデルとして，以下のバーガーズ方程式がよく知られている：

$$\partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + V_m\partial_x\left\{\rho\left(1-\frac{\rho}{\rho_m}\right)\right\} = 0. \tag{B}$$

ここで，$x\in\mathbb{R}, t>0$ とし，$\rho=\rho(t,x)$ は車の密度（未知関数）, ν は拡散係数, V_m は $\rho\to 0$ のときの最大速度，ρ_m は最大密度を表し，ν, V_m, ρ_m はすべて正定数である.

この (B) は, 密度 ρ と流量 q に関する「交通流の保存則」$\partial_t\rho+\partial_x q=0$ に,

$$q=\rho v,\quad v=V_m\left(1-\frac{\rho}{\rho_m}\right)-\frac{\nu}{\rho}\partial_x\rho$$

を代入することで得られる．上の第１式は流量と密度，速度の関係を表すものであり，第２式の１項目 $V_m(1-\rho/\rho_m)$ は, 空いている状況（ρ が 0 に近い場合）では車は最高速度 V_m に近い速度を出すことができ，逆に, 混んでいる状況（ρ が ρ_m に近い場合）では車はほとんど速度が出せないことを意味している．また，第２式の２項目は, 自分の車よりも前が混んでいる状況（$=\partial_x\rho>0$ の場合）にはスピードを落とし，前が空いている状況（$=\partial_x\rho<0$ の場合）にはスピードを上げることを意味している.

この数理モデル (B) を導出するための v と ρ の関係式をみると, 密度 ρ が変化すれば同時に速度 v も変化することを意味しており，運転手は周囲の混雑状況から瞬時に判断し, 車の速度を変えること

* E-mail:g2340603@edu.cc.ocha.ac.jp

を意味している．一方, 現実においては, 運転手が混雑状況を把握してから車の速度を調整するまでに時間遅れが伴う．そのことを考慮し, 固定された遅れパラメータ $\tau > 0$ に対し, τ だけ過去の密度 $\rho_\tau = \rho(t-\tau)$ から決まる速度：

$$v(t,x) = V_m\left(1 - \frac{\rho_\tau}{\rho_m}\right) - \frac{\nu}{\rho}\partial_x\rho$$

を導入すれば, 先と同様に以下のバーガーズ方程式を得る:

$$\partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + V_m\partial_x\left\{\rho\left(1 - \frac{\rho_\tau}{\rho_m}\right)\right\} = 0.$$

この速度の項をさらに一般化して，Kubo-Ueda[1] では

$$\begin{cases} \partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + \partial_x(\rho V(\rho_\tau)) = 0, & (t > 0,\ x \in \mathbb{R}), \\ \rho(\theta, x) = \rho_0(\theta, x) & (-\tau \le \theta \le 0,\ x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

の初期履歴問題が考察されている．ただし, $V(\rho)$ は ρ に関して C^1 級関数, $\rho_0(\theta,x)$ は $-\tau \le \theta \le 0$ を満たす θ に対して与えられた関数である．[1] では，時間局所解とアプリオリ評価を組み合わせることで，ρ と τ がある関係を満たす場合において，時間大域解の一意存在性定理が証明されている．

本講演では, τ だけ過去から現在までの密度分布に依存する速度を導入して得られるバーガーズ方程式を考える [2]：

$$\begin{cases} \partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + \partial_x\left\{\rho\left(1 - \int_{t-\tau}^{t} f(t-s)\rho(s)\ ds\right)\right\} = 0, & (t > 0, x \in \mathbb{R}), \\ \rho(\theta, x) = \rho_0(\theta, x), & (-\tau \le \theta \le 0, x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

ただし, f は $\left(\int_0^\tau |f(t)|^2\ dt\right)^{1/2} =: M_f < \infty$ を満たす重み関数, また, $\rho_0(\theta,x)$ は $-\tau \le \theta \le 0$ を満たす θ に対して与えられた関数である．この問題に対しては，Kubo-Ueda[1] と同様にして，[2] において ρ と τ がある関係を満たす場合において，時間大域解の一意存在性定理が示されている．本発表では，半群理論を用いて時間大域解の一意存在定理を導くことを目標として上の問題の考察を行った．

考える問題の第１式には $\rho(t)$ 以外に，τ だけ過去から現在までの密度にも依存しているため，そのままでは半群理論は適用しづらい．そこで，補助関数

$$z(t,\theta,x) := \rho(t+\theta, x)$$

を用意し, 以下のバーガーズ方程式を得る：

$$\begin{cases} \partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + \partial_x\left\{\rho\left(1 - \int_{-\tau}^{0} f(-\theta)z(t,\theta)\ d\theta\right)\right\} = 0, & (t > 0,\ x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t z = \partial_\theta z \quad t > 0, & (-\tau \le \theta \le 0,\ x \in \mathbb{R}), \\ \rho(\theta, x) = \rho_0(\theta, x), & (-\tau \le \theta \le 0,\ x \in \mathbb{R}). \end{cases} \tag{p}$$

ここで, 以下に注意する：

$$\int_{t-\tau}^{t} f(t-s)\rho(s)\ ds = \int_0^\tau f(r)\rho(r-\tau)\ dr = \int_0^\tau f(r)z(t,-r)\ dr = \int_{-\tau}^{0} f(-\theta)z(t,\theta)\ d\theta.$$

変数変換により (p) は以下の方程式に帰着できる：

$$
\begin{cases}
\partial_t \rho - \nu \partial_x^2 \rho + \partial_x \left\{ \rho \displaystyle\int_{-\tau}^{0} f(-\theta) z(t,\theta)\ d\theta \right\} = 0, & (t>0,\ x\in\mathbb{R}),\\
\partial_t z = \partial_\theta z, & (\tau>0,\ -\tau\le\theta\le 0,\ x\in\mathbb{R}),\\
\rho(\theta,x) = \rho_0(\theta,x), & (-\tau\le\theta\le 0,\ x\in\mathbb{R}).
\end{cases}
\tag{P}
$$

さらに, [3] から, (P) に対応する以下の積分方程式が導出される：

$$
\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix} = \mathscr{T}_0(t)\begin{pmatrix}\rho(\tau)\\ z(\tau,\theta)\end{pmatrix} - \int_\tau^t \mathscr{T}_0(t-s)\begin{pmatrix}\partial_x g(s)\\ 0\end{pmatrix}\ ds. \tag{IE}
$$

ただし, 記号簡単のため，$g(s) = \rho\displaystyle\int_{-\tau}^{0} f(-\theta) z(t,\theta)\ d\theta$ とおき，また，半群 $\mathscr{T}_0(t)$ は以下で与えられるものである：

$$
\mathscr{T}_0(t) = \begin{pmatrix} S(t) & 0\\ S_t & T_0(t)\end{pmatrix}.
$$

ただし, $S(t)$ は $-\nu\partial_x^2$ によって生成される半群, $S_t : H^1$ から $C([-\tau,0]:H^1)$ への作用素であり,

$$
(S_t x)(\theta) = \begin{cases} S(t+\theta)x & (t+\theta>0),\\ 0 & (t+\theta\le 0)\end{cases}
$$

で与えられる．また，$T_0(t) : C([-\tau,0]:H^1)$ 上のべき零左シフト半群, すなわち,

$$
T_0(t)z(0,\theta) = \begin{cases} z(0,t+\theta) & (t+\theta\le 0),\\ 0 & (t+\theta>0)\end{cases}
$$

で与えられる[*1].

2 主定理

本発表では，主定理として，半群理論を用いて (IE) に対して, 次の時間大域解の存在定理を証明することができたことを紹介する.

定理 2.1 (時間大域解の存在定理)**.** $0\le\tau\le 1/2$ とする．このとき，次を満たす（十分小さい）正定数 σ が存在する．もし, $\rho_0(\theta)\in C([-\tau,0]:H^1)$ が $\rho_0(0)\in L^1$ であり,

$$
\|\rho_0(0)\|_{L^1} + \sup_{-\tau\le\theta\le 0}\|\rho_0(\theta)\|_{H^1} \le \sigma
$$

を満たすとき, (IE) に対してある一意解 $\rho(t)$ と $z(t,\theta)$ が存在して,

$$
\rho(t)\in C([-\tau,\infty):H^1),\ z(t,\theta)\in C([0,\infty)\times[-\tau,0]:H^1)
$$

[*1] $u\in H^1$ であるとは $u\in L^2$ かつ $\partial_x u\in L^2$ を満たすことである．また，$\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2} + \|\partial_x u\|_{L^2}$ で H^1 のノルムを定める.

と次の不等式を満たす：

$$\sup_{t\geq -\tau}\left\{(1+t)^{\frac{1}{4}}\|\rho(t)\|_{L^2}+(1+t)^{\frac{3}{4}}\|\partial_x\rho(t)\|_{L^2}\right\}$$
$$+\sup_{t\geq 0}\left\{\sup_{-\tau\leq\theta\leq 0}\left\{(1+t+\theta)^{\frac{1}{4}}\|z(t,\theta)\|_{L^2}+(1+t+\theta)^{\frac{3}{4}}\|\partial_x z(t,\theta)\|_{L^2}\right\}\right\}\leq 2C_0\sigma.$$

ただし，C_0 は (3.1) で与えられる正定数である．

3　主定理の証明の概略

縮小写像の定理を用いて主定理を証明するために，写像と基盤空間を準備する．写像は，積分方程式 (IE) の右辺と定める，すなわち，

$$\Phi\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}(t)=\begin{pmatrix} S(t)\rho_0(0)-\displaystyle\int_0^t S(t-s)\partial_x\{\rho(s)V(z)(s)\}\,ds \\ S_t\rho_0(0)+T_0(t)z(0,\theta)-\displaystyle\int_0^t S_{t-s}\left[\partial_x\{\rho(s)V(z)(s)\}\right]\,ds\end{pmatrix}.$$

と定める．また，以下のように基盤空間 B と B_σ を用意する．

$$B:=\left\{\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\mid \rho\in C([-\tau,\infty):H^1),\ z\in C\left([0,\infty)\times[-\tau,0]:H^1)\right)\right\},$$
$$B_\sigma:=\left\{\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\in B\;\middle|\;\begin{array}{c}\|\rho(t)-\rho_0(\theta)\|_{H^1}\to 0\ (t\to 0),\\ \|z(t,\theta)-z(0,\theta)\|_{H^1}\to 0\ (t\to 0,\forall\theta\in[-\tau,0])\\ \left\|\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\right\|_{B_\sigma}\leq 2C_0\sigma\end{array}\right\},$$

ただし，
$$\left\|\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\right\|_{B_\sigma}:=\sup_{t\geq -\tau}\left\{(1+t)^{\frac{1}{4}}\|\rho(t)\|_{L^2}+(1+t)^{\frac{3}{4}}\|\partial_x\rho(t)\|_{L^2}\right\}$$
$$+\sup_{t\geq 0}\left\{\sup_{-\tau\leq\theta\leq 0}\left\{(1+t+\theta)^{\frac{1}{4}}\|z(t,\theta)\|_{L^2}+(1+t+\theta)^{\frac{3}{4}}\|\partial_x z(t,\theta)\|_{L^2}\right\}\right\}.$$

Φ が B_σ 上の縮小写像であることを証明できれば，縮小写像の定理から主定理が得られることがわかることに注意する．Φ が B_σ 上の縮小写像であることを示すために必要な熱半群の評価や初等的な評価を紹介する．1 つ目の補題は，熱半群の L^1-L^2 評価である：

補題 3.1. $g\in H^1\cap W^{1,1}$, $0\leq\theta,\theta_1,\theta_2\leq 1$ とするとき, 以下の不等式が成立する：

$$\|S(t)g\|_{L^2}\leq C_{0,\ell}^2(1+2\nu t)^{-\frac{1}{4}}\|g\|_{L^1}+e^{-\nu t}\|g\|_{L^2},$$
$$\|S(t)\partial_x g\|_{L^2}\leq C_{1,\ell}^2(1+2\nu t)^{-\frac{3}{4}}\|g\|_{L^1}+C_{1,h}^2\left\{e^{-\frac{1}{2}\nu t}(\nu t)^{-\frac{1}{2}}\|g\|_{L^2}\right\}^{\theta}\left\{e^{-\nu t}\|\partial_x g\|_{L^2}\right\}^{1-\theta},$$
$$\|\partial_x S(t)\partial_x g\|_{L^2}\leq C_{2,\ell}^2\left\{(1+2\nu t)^{-\frac{5}{4}}\|g\|_{L^1}\right\}^{\theta_1}\left\{(1+2\nu t)^{-\frac{3}{4}}\|\partial_x g\|_{L^1}\right\}^{1-\theta_1}$$
$$+C_{2,h}^2\left\{e^{-\frac{1}{2}\nu t}(\nu t)^{-\frac{1}{2}}\|\partial_x g\|_{L^2}\right\}^{\theta_2}\left\{e^{-\frac{1}{2}\nu t}(\nu t)^{-1}\|g\|_{L^2}\right\}^{1-\theta_2}.$$

ここで, $C_{0,\ell}^2$, $C_{1,\ell}^2$, $C_{1,h}^2$, $C_{2,\ell}^2$, $C_{2,h}^2$ は τ によらないある正定数である．

注意 3.1. $g \in L^2$ に対して，$S(t)g$ はフーリエ変換 $\mathcal{F}$ とその逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ を用いて以下で与えられる：

$$S(t)g = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\nu|\xi|^2 t}\mathcal{F}[g]\right].$$

このことから，$\partial_x S(t)g = S(t)\partial_x g$ がわかる．

次の評価式は，積分方程式 (IE) の積分の項を評価する際に使われる初等的な評価式である．

補題 3.2. $0 < a, b < 1$, $k > 0$, $0 \leq \tau \leq 1/2$, $t \geq \tau$, $\nu > 0$ とする．

このとき, 以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\int_\tau^t \{1 + (2\nu(t-s)\}^{-a}(1+s-\tau)^{-b}\ ds \leq C_1^3(1+t-\tau)^{1-a-b}, \\
&\int_\tau^t e^{-k(t-s)}(t-s)^{-a}(1+s-\tau)^{-b}\ ds \leq C_2^3 t^{-a}(1+t-\tau)^{1-b}.
\end{aligned}$$

ここで, C_1^3, C_2^3 は τ によらない定数である．

これらの補題を用いて Φ が B_σ 上の縮小写像であることが示される．実際,

$$\Phi\begin{pmatrix}\rho \\ z\end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} S(t)\rho_0(0) - \int_0^t S(t-s)\partial_x g(s)\ ds \\ S_t\rho_0(0) + T_0(t)z(0,\theta) - \int_0^t S_{t-s}(\partial_x g(s))\ ds\end{pmatrix}.$$

の第 1 成分について，上の 2 つの補題を用いれば

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\Phi\begin{pmatrix}\rho \\ z\end{pmatrix}\right)_1\right\|_{L^2} &\leq \|S(t-\tau)\rho(\tau)\|_{L^2} + \int_\tau^t \|S(t-s)\partial_x g(s)\|_{L^2}\ ds \\
&\leq C_{0,\ell}^2\left(1+2\nu(t-s)\right)^{-\frac{1}{4}}\|\rho_0(\tau)\|_{L^1} + e^{-\nu(t-\tau)}\|\rho_0(\tau)\|_{L^2} \\
&\quad + \int_\tau^t C_{1,\ell}^2\left(1+2\nu(t-s)\right)^{-\frac{3}{4}}\|g(s)\|_{L^1}\ ds \\
&\quad + \int_\tau^t C_{1,h}^2\left\{2^{-\frac{1}{2}\nu(t-s)}(\nu(t-s))^{-\frac{1}{2}}\|g(s)\|_{L^2}\right\}^{\theta_1} \times \left\{e^{-\nu(t-s}\|\partial_x g(s)\|_{L^2}\right\}^{1-\theta_1}\ ds \\
&=: I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

と評価できる．I_1 については，$0 \leq t \leq \tau$ に対しては，積分方程式を

$$\begin{pmatrix}\rho \\ z\end{pmatrix} = \mathscr{T}_0(t)\begin{pmatrix}\rho(0) \\ z(0,\theta)\end{pmatrix} - \int_0^t \mathscr{T}_0(t-s)\begin{pmatrix}\partial_x g(s) \\ 0\end{pmatrix}\ ds$$

と書き換え，補題を用いると

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \left(C_{0,\ell}^2(1+2\nu(t-\tau))^{-\frac{1}{4}} + e^{-\nu(t-\tau)}\right)\left(\|\rho_0(0)\|_{L^1} + 4C_0 M_f\sqrt{\tau}(1+16C_0)\sigma^2\right) \\
&\leq \left(C_{0,\ell}^2(1+(2\nu)^{-1/4}) + (4\nu)^{-1/4}e^{-1/4+\nu}\right)\left(\|\rho_0(0)\|_{L^1} + 4C_0 M_f\sqrt{\tau}(1+16C_0)\sigma^2\right)(1+t)^{-\frac{1}{4}},
\end{aligned}$$

と評価できる．また，I_2 についても補題から，

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le \int_\tau^t \ C_{1,\ell}^2 \left(1+2\nu(t-s)\right)^{-\frac{3}{4}} \|g(s)\|_{L^1} ds \\
&\le 4C_{1,\ell}^2 C_0^2 M_f \sqrt{\tau}\sigma^2 \int_\tau^t \ \left(1+2\nu(t-s)\right)^{-\frac{3}{4}} \left(1+s-\tau\right)^{-\frac{1}{2}} \ ds \\
&\le 4C_{1,\ell}^2 C_1^3 C_0^2 M_f \sqrt{\tau}\sigma^2 (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}} \\
&\le 4C_{1,\ell}^2 C_1^3 C_0^2 M_f \sqrt{\tau}\sigma^2 (1+\tau)^{\frac{1}{4}} (1+t)^{-\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

と評価でき，I_3 も I_2 と同様に，

$$
\begin{aligned}
I_3 &\le C_{1,h}^2 \int_\tau^t e^{-\frac{1}{2}\nu(t-s)\theta_1} e^{-\nu(t-s)(1-\theta_1)} (\nu(t-s))^{-\frac{1}{2}\theta_1} \|g(s)\|_{L^2}^{\theta_1} \|\partial_x g(s)\|_{L^2}^{1-\theta_1} ds \\
&\le C_{1,h}^2 4\cdot 2^{1-\theta_1} M_f \sqrt{\tau} C_0^2 \sigma^2 \int_\tau^t e^{-\frac{1}{2}\nu(t-s)(2-\theta_1)} (\nu(t-s))^{-\frac{1}{2}\theta_1} (1+s-\tau)^{-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\theta_1} ds \\
&\le C_{1,h}^2 4\cdot 2^{1-\theta_1} M_f \sqrt{\tau} C_0^2 \sigma^2 C_2^3 \nu^{-\frac{1}{2}\theta_1} t^{-\frac{1}{2}\theta_1} (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta_1} \\
&= C_{1,h}^2 4\cdot 2^{1-\theta_1} M_f \sqrt{\tau} C_0^2 \sigma^2 C_2^3 \nu^{-\frac{1}{2}\theta_1} (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}\theta_1}
\end{aligned}
$$

と評価できる．ただし，θ_1 は $0 \le \theta_1 \le 1$ を満たす任意の実数である．ここで，簡単のため $\theta_1 = 3/4$ ととると，以下を得る：

$$
\begin{aligned}
I_3 &\le 4\cdot 2^{\frac{1}{4}} C_{1,h}^2 M_f C_0^2 \sigma^2 C_2^3 \nu^{-\frac{3}{8}} (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}} \tau^{\frac{1}{8}} \\
&\le 4\cdot 2^{\frac{1}{4}} C_{1,h}^2 M_f C_0^2 \sigma^2 C_2^3 \nu^{-\frac{3}{8}} \tau^{\frac{1}{8}} (1+\tau)^{\frac{1}{4}} (1+t)^{-\frac{1}{4}}.
\end{aligned}
$$

以上から，

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(\Phi \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \right)_1 \right\|_{L^2} \le{}& \left(C_{0,\ell}^2 (1+(2\nu)^{-1/4}) + (4\nu)^{-1/4} e^{-1/4+\nu} \right) \|\rho_0(0)\|_{L^1} (1+t)^{-\frac{1}{4}} \\
&+ 4C_0 M_f \sqrt{\tau} \left(C_{0,\ell}^2 (1+(2\nu)^{-1/4}) + (4\nu)^{-1/4} e^{-1/4+\nu} \right) (1+16C_0) \sigma^2 (1+t)^{-\frac{1}{4}} \\
&+ 4C_0^2 M_f \tau^{\frac{1}{8}} \left(C_{1,\ell}^2 C_1^3 \tau^{\frac{3}{8}} + 4\cdot 2^{\frac{1}{4}} C_{1,h}^2 C_2^3 \nu^{-\frac{3}{8}} \right) (1+\tau)^{\frac{1}{4}} \sigma^2 (1+t)^{-\frac{1}{4}}.
\end{aligned}
$$

が得られる．同様にして，$\left\| \partial_x \left(\Phi \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \right)_1 \right\|_{L^2}$，$\left\| \left(\Phi \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \right)_2 \right\|_{L^2}$，$\left\| \partial_x \left(\Phi \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \right)_2 \right\|_{L^2}$ の評価を行

えば，最終的に，$\left\|\Phi\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\right\|_{B_\sigma}$ の評価が次のように得られる：

$$\begin{aligned}\left\|\Phi\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\right\|_{B_\sigma} \leq& 2\left(C_{0,\ell}^2(1+(2\nu)^{-\frac{1}{4}})+(4\nu)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}+\nu}\right)\sigma+(1+\tau)^{\frac{1}{4}}\sigma\\ &+2\left(C_{1,\ell}^2(1+(2\nu)^{-\frac{3}{4}})+(4\nu)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}+\nu}\right)\sigma+(1+\tau)^{\frac{3}{4}}\sigma\\ &\quad+8C_0M_f\sqrt{\tau}\left(C_{0,\ell}^2(1+(2\nu)^{-\frac{1}{4}})+(4\nu)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}+\nu}\right)(1+16C_0)\sigma^2\\ &\quad+4C_0^2M_f\tau^{\frac{1}{8}}\left(C_{1,\ell}^2C_1^3\tau^{\frac{3}{8}}+4\cdot 2^{\frac{1}{4}}C_{1,h}^2C_2^3\nu^{-\frac{3}{8}}\right)(1+\tau)^{\frac{1}{4}}\sigma^2\\ &\quad+4C_0^2M_f\tau^{\frac{1}{8}}\left(C_{1,\ell}^2C_1^3\tau^{\frac{3}{8}}+4\cdot 2^{\frac{3}{4}}C_{1,h}^2C_2^3\nu^{-\frac{3}{8}}\right)(1+\tau)^{\frac{1}{4}}\sigma^2\\ &+2\left(C_{1,\ell}^2(1+(2\nu)^{-\frac{3}{4}})+C_{1,h}^2(4\nu)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}+\nu}\tau^{\frac{1}{2}}\right)4C_0M_f\sqrt{\tau}(1+16C_0)\sigma^2\\ &+8\cdot 2^{\frac{1}{4}}C_0^2M_f\tau^{-\frac{3}{8}}\sigma^2\left(C_{2,\ell}^2C_1^3\tau^{\frac{7}{8}}+C_{2,h}^2\nu^{-\frac{7}{8}}\right)(1+\tau)^{\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

ここで，C_0 を σ の 1 次の係数と設定する，すなわち

$$C_0 := 2\left(C_{0,\ell}^2(1+(2\nu)^{-\frac{1}{4}})+C_{1,\ell}^2(1+(2\nu)^{-\frac{3}{4}})+2(4\nu)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}+\nu}\right)+(1+\tau)^{\frac{1}{4}}+(1+\tau)^{\frac{3}{4}} \quad (3.1)$$

と設定すれば，以上の評価から，もし σ を十分小さくとるならば，$\left\|\Phi\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\right\|_{B_\sigma} \leq 2C_0M$ が成り立つことがわかる．また，

$$\|\rho(t)-\rho_0(\theta)\|_{H^1}\to 0\ (t\to 0),\qquad \|z(t,\theta)-z(0,\theta)\|_{H^1}\to 0\ (t\to 0,\forall\theta\in[-\tau,0])$$

も証明することができるので，Φ が B_σ 上の縮小写像であると示される．よって，縮小写像の定理から，(IE) を満たす $\rho\in B_\sigma$ が一意に存在することがわかる．以上から，B_σ において (IE) の解を得る．

参考文献

[1] Takayuki Kubo and Yoshihiro Ueda, "*Existence theorem for global in time solutions to Burgers equation with a time delay*", Journal of Differential Equations, 184-230, (2022).

[2] 櫻井 咲希, 分布型時間遅れをもつ Burgers 方程式の時間大域解について, 令和 4 年度修士論文, (2022).

[3] Bátkai András and Piazzera Susanna, Semigroups for delay equations, AK Peters/CRC Press, (2005).